Total number of printed pages–31

3 (Sem–5/CBCS) MAT RE 1/RE 2

2022

MATHEMATICS

(Regular Elective)

Answer the Questions from any one Option.

OPTION–A

(Number Theory)

Paper : MAT–RE–5016

OPTION–B

(Discrete Mathematics)

Paper : MAT–RE–5026

Full Marks : 80

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

*Answer **either** in English **or** in Assamese.*

Contd.

OPTION–A

1. Choose the correct options : ***(any ten)*** $1\times10=10$

শুদ্ধ উত্তৰ বাচি উলিওৱা ঃ *(যিকোনো দহটা)*

(i) If যদি $36\,! \equiv x(\bmod 37)$, then x is

তেতিয়া, x ৰ মান হব ঃ

(a) 36

(b) 1

(c) 10

(d) None of the above

ওপৰৰ এটাও নহয়

(ii) The set of integers such that every integer is congruent modulo m to exactly one integer of the set is called —— modulo m.

অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতিটোক য'ত প্ৰতিটো অখণ্ড সংখ্যাই সংহতিটোক সঠিক এটা অখণ্ড সংখ্যাৰ সৈতে congruent modulo m হয় তাক —— modulo m বুলি কোৱা হয়।

(a) Reduced residue system

হ্ৰাসমান অৱশেষ প্ৰণালী

(b) Complete residue system

সম্পূৰ্ণ অৱশেষ প্ৰণালী

(c) Elementary residue system

প্ৰাথমিক অৱশেষ প্ৰণালী

(d) None of the above

ওপৰৰ এটাও নহয়

(iii) If a is a whole number and p is a prime number, then according to Fermat's theorem.

যদিহে a এটা পূৰ্ণ সংখ্যা আৰু p এটা মৌলিক সংখ্যা হয়, তেতিয়াহলে ফাৰ্মাটৰ উপপাদ্য অনুযায়ী

(a) $a^p - a$ is divisible by p

$a^p - a$, p ৰ বিভাজ্য হব

(b) $a^p - 1$ is divisible by p

$a^p - 1$, p ৰ বিভাজ্য হব

(c) $a^{p-1} - 1$ is divisible by p

$a^{p-1} - 1$, p ৰ বিভাজ্য হব

(d) $a^{p-1} - a$ is divisible by p

$a^{p-1} - a$, p ৰ বিভাজ্য হব

(iv) The product of three consecutive positive integers is divisible by

তিনিটা ক্ৰমিক ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যাৰ পূৰণফলক সম্পূৰ্ণৰূপে বিভাজন কৰিব পৰা সংখ্যাটো হব ঃ

(a) 4

(b) 6

(c) 7

(d) 9

(v) The unit place digit of 12^{73}

12^{73} ৰ একক স্থানৰ অংকটো হ'ব ঃ

(a) 4

(b) 6

(c) 8

(d) 2

(vi) The highest power of 7 that divides 49! Is

49! ক হৰণ কৰিব পৰা 7 ৰ সৰ্বোচ্চ ঘাত হ'ব ঃ

(a) 7

(b) 8

(c) 5

(d) 10

(vii) If যদি $ac \equiv bc \ (mod\, m)$ and আৰু $d = gcd\,(m, c)$

(a) $a \equiv b\left(\mathrm{mod}\,\frac{m}{d}\right)$

(b) $a \equiv c\left(\mathrm{mod}\,\frac{m}{d}\right)$

(c) $a \equiv m(\mathrm{mod}\, b)$

(d) $a \equiv m\left(\mathrm{mod}\,\frac{b}{a}\right)$

(viii) Let p be an odd prime. Then $x^2 \equiv -1 \ (mod\ p)$ has a solution if p is of the form

ধৰাইল, p এটা অযুগ্ম মৌলিক সংখ্যা। তেতিয়া, $x^2 \equiv -1 \ (mod\ p)$ এটা সমাধান থাকিব, যদিহে p ৰ আকাৰ

(a) $4k+1$

(b) $4k$

(c) $4k+3$

(d) None of the above

ওপৰৰ এটাও নহয়

(ix) If a positive integer n divides the difference of two integers a and b, then

যদি এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n য়ে a আৰু b অখণ্ড সংখ্যা দুটাৰ অন্তৰফলক বিভাগ কৰে, তেতিয়া হ'লে,

(a) $a \equiv b(\mathrm{mod}\, n)$

(b) $a = b(\mathrm{mod}\, n)$

(c) $a \equiv n(\mathrm{mod}\, b)$

(d) None of the above

ওপৰৰ এটাও নহয়

Contd.

(x) Which theorem states that "if p is prime, then $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$"?

তলৰ কোনটো উপপাদ্যৰ মতে "যদিহে p এটা মৌলিক সংখ্যা তেতিয়া হলে, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod p$"

(a) Dirichlet's theorem

Dirichlet ৰ উপপাদ্য

(b) Wilson's theorem

Wilson ৰ উপপাদ্য

(c) Euler's theorem

Euler ৰ উপপাদ্য

(d) Fermat's little theorem

Fermat ৰ little উপপাদ্য

(xi) If যদি $100! \equiv x \pmod{101}$, then x is

তেতিয়া x ৰ মান

(a) 99

(b) 100

(c) 101

(d) None of the above

ওপৰৰ এটাও নহয়

(xii) For any integer a satisfying $13^3 \equiv x \pmod 3$, then x is

যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা x ৰ বাবে $13^3 \equiv x \pmod 3$ হলে x ৰ মান হব ঃ

(a) 1

(b) 2

(c) 0

(d) 3

(xiii) If the integers a, $b > 0$, then set of all integers of the form $ma + nb\ (m, n \in Z)$ includes

যদি a, $b > 0$, দুটা অখণ্ড সংখ্যা হয়। তেতিয়া $ma + nb\ (m, n \in Z)$ আকাৰৰ সকলো অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতিটো

(a) their gcd but not lcm

সিহতৰ gcd কিন্তু lcm নহয়

(b) their lcm but not gcd

সিহতৰ lcm কিন্তু gcd নহয়

(c) both lcm and gcd

lcm আৰু gcd দুয়োটাই

(d) neither gcd nor lcm

gcd আৰু lcm এটাও নহয়

(xiv) One of the solution of the congruence $15x \equiv 6(mod 21)$ is

$15x \equiv 6(mod 21)$ congruence টোৰ এটা সমাধান হ'ল ঃ

(a) 5

(b) 6

(c) 7

(d) 8

(xv) The remainder when 2^{50} is divided by 7 is

2^{50} ক 7 ৰে হৰণ কৰিলে ভাগশেষটো হব ঃ

(a) 2

(b) 4

(c) 6

(d) 8

(xvi) Number of integers which are less than and co-prime to 108 is

108 তকৈ সৰু আৰু তাৰ সহ মৌলিক অখণ্ড সংখ্যাৰ মুঠ সংখ্যা হব ঃ

(a) 18

(b) 17

(c) 15

(d) 36

(xvii) Euler phi-function of a prime number p is

p এটা মৌলিক সংখ্যা হলে তাৰ Euler phi function হব ঃ

(a) p

(b) $p-1$

(c) $p/2-1$

(d) None of the above

ওপৰৰ এটাও নহয়

(xviii) The solution of pair of linear congruence $x \equiv 3(mod 5)$ and $x \equiv 4(mod 3)$ is

$x \equiv 3(mod 5)$ আৰু $x \equiv 4(mod 3)$ linear congruence দুটাৰ সমাধান হব ঃ

(a) $x \equiv 13(mod 5)$

(b) $x \equiv 28(mod 5)$

(c) $x \equiv 13(mod 15)$

(d) $x \equiv 13(mod 3)$

2. Answer ***any five*** questions : $2\times5=10$

যিকোনো পাঁচটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) Evaluate the exponent of 5 in 500!.

500! 5 ৰ exponent নিৰ্ণয় কৰা।

(b) Find $\tau(756)$.

$\tau(756)$ ৰ মান উলিওৱা।

(c) Find the number of zeroes at the end of the product of first seventy natural numbers.

প্ৰথম 70টা স্বাভাৱিক সংখ্যাৰ পূৰণফলৰ শেষৰ পিনে থকা মুঠ শূন্যৰ সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা।

(d) Find all the prime numbers p such that p^2+2 is also a prime number.

আটাইবোৰ মৌলিক সংখ্যা p নিৰ্ণয় কৰা যাতে p^2+2 ও এটা মৌলিক সংখ্যা হয়।

(e) If m and n are integers such that $\gcd(m,n)=1$, then $\tau(mn)=\tau(m)\,\tau(n)$

যদি m আৰু n দুটা অখণ্ড সংখ্যা হয় যাতে, $\gcd(m,n)=1$ তেতিয়া প্ৰমাণ কৰা যে, $\tau(mn)=\tau(m)\,\tau(n)$

(f) If $\gcd(a,\ b)=1$, then find $\gcd\ (a+b,\ a^2-ab+b^2)$.

যদি $\gcd(a,\ b)=1$, তেতিয়া $\gcd\ (a+b,\ a^2-ab+b^2)$ ৰ মান উলিওৱা।

(g) If যদি $a\equiv b(\bmod n)$ and আৰু $m\,|\,n$, then show that $a\equiv b(\bmod m)$.

তেতিয়া দেখুওৱা যে, $a\equiv b(\bmod m)$।

(h) Find the solution of following linear Diophantine equation $4x-7y=-20$.

$4x-7y=-20$ ৰৈখিক Diophantine সমীকৰণটোৰ সমাধান নিৰ্ণয় কৰা।

(i) If x be any real number. Then show that যদি x এটা যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা হয়, তেতিয়াহলে দেখুওৱা যে,

$$[x]+[-x]=\begin{cases}0 & \text{if } x \text{ is an integer}\\ -1 & \text{otherwise}\end{cases}$$

যদি x এটা অখণ্ড সংখ্যা অন্য থাই।

(j) Show that if দেখুওৱা যে যদিহে $185a\equiv1295(\bmod 259)$ then তেতিয়া, $a\equiv7(\bmod 37)$.

3. Answer **any four** questions : $5 \times 4 = 20$

যিকোনো চাৰিটা প্ৰশ্নৰ উত্তৰ কৰা ঃ

(a) If p_n is the n^{th} prime, then show that $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_n}$ is not an integer.

যদি n তম মৌলিক সংখ্যাটো p_n হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে, $\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\ldots+\frac{1}{p_n}$ অখণ্ড সংখ্যা নহয়।

(b) Show that, the set of integers $\{5, 13, 27, 31, 34\}$ is a complete Residue System (RRS) modulo 5.

দেখুওৱা যে, $\{5, 13, 27, 31, 34\}$ অখণ্ড সংখ্যাৰ সংহতিটো এটা সম্পূৰ্ণ Residue System (RRS) modulo 5.

(c) If k denotes the number of distinct prime factors of positive integer n. Prove that $\sum_{d|n} |\mu(d)| = 2^k$.

যদিহে এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n ৰ ভিন্ন মৌলিক উৎপাদকৰ সংখ্যা k, তেতিয়া প্ৰমাণ কৰা যে, $\sum_{d|n} |\mu(d)| = 2^k$.

(d) If n is a prime integer with $n \geq 2$, then show that $(n-1)! \equiv -1 (\bmod n)$.

যদি n এটা মৌলিক অখণ্ড সংখ্যা য'ত $n \geq 2$, তেতিয়া দেখুওৱা যে, $(n-1)! \equiv -1 (\bmod n)$.

(e) If $a_1 a_2 \ldots a_m$ is a complete residue system modulo m, and if k is a positive integer with $(k, m) = 1$, then $ka_1 + b$, $ka_2 + b, \ldots, ka_m + b$, is a complete residue system modulo m for any integer b.

যদি $a_1 a_2 \ldots a_m$ এটা সম্পূৰ্ণ residue system modulo m হয় আৰু k এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা য'ত $(k, m) = 1$, তেতিয়া $ka_1 + b$, $ka_2 + b, \ldots, ka_m + b$ এটা যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা b ৰ সম্পূৰ্ণ residue system modulo m হব।

(f) Find last *two* digits of 54^{380}.

54^{380} ৰ শেষৰ দুটা অংক নিৰ্ণয় কৰা।

Contd.

(g) Solve $3[x] = x + 2\{x\}$ where $[x]$ denotes greatest integer less or equal to x and $\{x\}$ denotes the fractional part of x.

সমাধান কৰা ঃ $3[x] = x + 2\{x\}$,

য'ত $[x]$ য়ে x ৰ সমান নতুবা x তকৈ সৰু বৃহত্তম অখণ্ড সংখ্যাক বুজায় আৰু $\{x\}$ য়ে x ৰ ভগ্নাংশক নিৰ্দেশ কৰে।

(h) Find all integers that leave a remainder of 4 when divided by 11 and leaves a remainder of 3 when divided by 17.

এনেকুৱা আটাইবোৰ অখণ্ড সংখ্যা নিৰ্ণয় কৰা, যিবোৰক 11 ৰে হৰণ কৰিলে 4 ভাগশেষ আৰু 17 ৰে হৰণ কৰিলে 3 ভাগশেষ থাকে।

(i) Show that if p is an odd prime, then $2(p-3)! \equiv -1 \pmod{p}$.

যদি p এটা অযুগ্ম মৌল হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে, $2(p-3)! \equiv -1 \pmod{p}$ ।

(j) If φ is Euler's phi function, then find $\varphi(\varphi(7056))$.

যদি φ এটা Euler ৰ phi ফলন হয়, তেন্তে $\varphi(\varphi(7056))$ ৰ মান নিৰ্ণয় কৰা।

4. Answer ***any four*** of the following questions : $10\times4=40$

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ ***যিকোনো চাৰিটাৰ*** উত্তৰ কৰা ঃ

(i) (a) If $a, b \neq 0$ and c be any three integers and $d = \gcd(a, b)$. Then show that $ax + by = c$ has a solution iff $d \mid c$.

Furthermore, show that if x_0 and y_0 is a particular solution of $ax + by = c$, then any other solution of the equation is $x' = x_0 - \frac{b}{d}t$ and $y' = y_0 + \frac{a}{d}t$, t is an integer.

যদি $a, b \neq 0$ আৰু c যিকোনো তিনিটা অখণ্ড সংখ্যা আৰু $d = \gcd(a, b)$ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে, $ax + by = c$ সমীকৰণটোৰ সমাধান থাকিব যদি আৰু একমাত্ৰ যদিহে $d \mid c$, আকৌ দেখুওৱা যে, যদিহে x_0 আৰু y_0 $ax + by = c$ ৰ বিশেষ সমাধান তেতিয়াহলে সমীকৰণটোৰ আন সমাধান $x' = x_0 - \frac{b}{d}t$ আৰু $y' = y_0 + \frac{a}{d}t$ য'ত t এটা অখণ্ড সংখ্যা।

(b) Find the general solution of $10x - 8y = 42$. 7+3=10

$10x - 8y = 42$ ৰ সাধাৰণ সমাধান নিৰ্ণয় কৰা।

(ii) (a) Prove that the quadratic congruence $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$, where p is an odd prime, has a solution iff $p \equiv 1 \pmod 4$.

প্ৰমাণ কৰা যে, $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod p$ য'ত p এটা অযুগ্ম মৌল, দ্বিঘাত congruence ৰ এটা সমাধান থাকিব যদি আৰু একমাত্ৰ যদিহে $p \equiv 1 \pmod 4$.

(b) If যদি $n > 1$ and আৰু gcd $(a, n) = 1$, then prove that তেতিয়াহলে প্ৰমাণ কৰা যে, $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n$ 5+5=10

(iii) (a) Prove that $\tau(n)$ is an odd integer iff n is a perfect square.

প্ৰমাণ কৰা যে, $\tau(n)$ এটা অযুগ্ম অখণ্ড সংখ্যা যদি আৰু যদিহে n এটা সম্পূৰ্ণ বৰ্গ হয়।

(b) Prove that $\Pi_{d|n} d = n^{\frac{\tau(n)}{2}}$, for any positive integer n. 5+5=10

প্ৰমাণ কৰা যে, $\Pi_{d|n} d = n^{\frac{\tau(n)}{2}}$, যিকোনো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n ৰ বাবে।

(iv) (a) If $a_1, a_2, \ldots, a_k$ is a reduced residue system modulo m, then $k = \varphi(m)$.

যদি $a_1, a_2, \ldots, a_k$ এটা reduced residue system modulo m হয়, তেতিয়া হলে দেখুওৱা যে, $k = \varphi(m)$.

(b) Find the remainder when 11^{35} is divided by 13. 5+5=10

11^{35} ক 13 ৰে হৰণ কৰিলে ভাগশেষ কিমান হব নিৰ্ণয় কৰা।

(v) State and prove Chinese remainder theorem. Also solve the system of congruence.

Chinese remainder উপপাদ্যটো লিখি প্ৰমাণ কৰা। লগতে তলৰ congruence প্ৰণালীটোৰ সমাধান নিৰ্ণয় কৰা।

$$x \equiv 1 \pmod 2$$
$$x \equiv 2 \pmod 3$$
$$x \equiv 3 \pmod 5$$

(vi) (a) Show that if $a_1, a_2, ..., a_{\varphi(m)}$ is a RRS modulo m, where m is a positive integer with $m \neq 2$, then $a_1 + a_2 + ... + a_{\varphi(m)} \equiv 0 \ (mod\, m)$.

দেখুওৱা যে, যদিহে $a_1, a_2, ..., a_{\varphi(m)}$ এটা RRS modulo m হয় য'ত m এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা যাতে $m \neq 2$, তেতিয়াহলে, $a_1 + a_2 + ... + a_{\varphi(m)} \equiv 0 \ (mod\, m)$।

(b) If a, b and m are three integers such that $\gcd(a, m) = 1$ and $ab \equiv 0 \ (mod\, m)$, then show that $b \equiv 0 \ (mod\, m)$. 5+5=10

যদি a, b আৰু m তিনিটা অখণ্ড সংখ্যা য'ত $\gcd(a, m) = 1$ আৰু $ab \equiv 0 \ (mod\, m)$, তেতিয়া, দেখুওৱা যে $b \equiv 0 \ (mod\, m)$.

(vii) If a, b, c, d, n are integers and $n > 0$, then establish the following

যদি a, b, c, d, n অখণ্ড সংখ্যা য'ত $n > 0$, তেতিয়া প্ৰমাণ কৰা যে,

(a) if যদি $a \equiv b(mod\, n)$ then তেতিয়া $ac \equiv bc(mod\, n)$

(b) if যদি $a \equiv b(mod\, n)$ then তেতিয়া $ac \equiv bc(mod\, nc)$ for c>0

(c) if যদি $a \equiv b(mod\, n)$ and আৰু $c \equiv d(mod\, n)$ then তেতিয়া, $a \pm c \equiv b \pm d(mod\, n)$

(d) if যদি $a \equiv b(mod\, n)$ and আৰু $c \equiv d(mod\, n)$ then তেতিয়া, $ac \equiv bc(mod\, n)$

(viii) (a) Prove that every positive integers n (>1) can be expressed uniquely as a product of primes.

প্ৰমাণ কৰা যে, প্ৰতিটো ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা n (>1) ক একক ভাবে মৌলিক সংখ্যা সমূহৰ পূৰণফল হিচাপে প্ৰকাশ কৰিব পাৰি।

(b) Determine all the solution of

$f(x) = x^2 - 7x + 2 \ (mod\, 5^3)$

$f(x) = x^2 - 7x + 2 \ (mod\, 5^3)$ ৰ আটাইবোৰ সমাধান নিৰ্ণয় কৰা। 5+5=10

(ix) If x be any real number. Then show that $1+3+3+3=10$

যদি x এটা যিকোনো বাস্তৱ সংখ্যা হয়, তেতিয়াহলে দেখুওৱা যে,

(a) $[x] \leq x < [x]+1$

(b) $[x+m] = [x]+m$, m is any integer

m যিকোনো অখণ্ড সংখ্যা.

(c) $[x]+[y] \leq [x+y]$

(d) $\left[\frac{[x]}{m}\right] = \left[\frac{x}{m}\right]$, if m is a positive integer

যদি m এটা ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা

(x) (a) Define the arithmetic function τ. If n is a square-free integer having r prime factors, prove that $\tau(n) = 2^r$.

Arithmetic ফলন τ ৰ সংজ্ঞা দিয়া। যদি n এটা r টা মৌলিক উৎপাদক বিশিষ্ট বৰ্গমুক্ত অখণ্ড সংখ্যা হয়, তেন্তে প্ৰমাণ কৰা যে, $\tau(n) = 2^r$.

(b) If p is a prime, prove that $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$. Also establish that $\varphi(n)$ is an even number for $n > 2$. $5+5=10$

যদি p মৌলিক, প্ৰমাণ কৰা যে, $\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1}$ আৰু, $n > 2$ ৰ বাবে উপস্থাপন কৰা যে, $\varphi(n)$ এটা যুগ্ম সংখ্যা।