Total number of printed pages–31

3 (Sem–5/CBCS) PHY RE

2021

(Held in 2022)

PHYSICS

(Regular Elective)

OPTION–C

Paper : PHY–RE– 5036

(Advanced Mathematical Physics–I)

Full Marks : 60

Time : Three hours

The figures in the margin indicate full marks for the questions.

*Answer **either** in English **or** in Assamese.*

ইংৰাজী অথবা অসমীয়াত উত্তৰ কৰিবা।

1. Answer the following questions very briefly : 1×7=7

তলত দিয়া প্ৰশ্নসমূহৰ অতি চমুকৈ উত্তৰ দিয়া :

(a) What are dimension and basis of a vector space?

ভেক্টৰ স্থানৰ মাত্ৰা আৰু বেচিচ্ কাক কয় ?

Contd.

(b) Give definition of a homomorphic group.

সমৰূপতা সংঘৰ সংজ্ঞা দিয়া।

(c) Write Hooke's law of elasticity in tensorial notation.

স্থিতিস্থাপকতাৰ হুকৰ সূত্ৰটো টেন্‌চৰৰ ভাষাত লিখা।

(d) If eigenvalues of matrix A are λ_i, write the eigenvalues of e^A.

A মেট্ৰিক্সৰ আইগেন মান λ_i হ'লে, e^A-ৰ আইগেন মান কি হ'ব লিখা।

(e) Prove the identity of $\delta_{ii} = n$ in n-dimensional space.

$\delta_{ii} = n$ অভেদটো n-মাত্ৰিক স্থানত প্ৰমাণ কৰা।

(f) What is the total number of independent components of anti-symmetric tensor A_{ij} in four dimensions?

চাৰি মাত্ৰাত প্ৰতিসমমিত টেন্‌চৰ A_{ij} ৰ স্বতন্ত্ৰ উপাংশৰ মুঠ সংখ্যা কিমান ?

(g) Write down the covariant derivative of tensor A_i.

A_i টেন্‌চৰৰ ক'ভেৰিয়েন্ট ডেৰিভেটিভটো লিখা।

2. Answer the following questions : 2×4=8

তলৰ প্ৰশ্নসমূহৰ উত্তৰ দিয়া :

(a) Show that $\delta_{ik}\varepsilon_{ikm} = 0$

দেখুউৱা যে $\delta_{ik}\varepsilon_{ikm} = 0$

(b) If matrix A is non-singular, show that the eigenvalues of A^{-1} are the reciprocals of those of A.

A অপ্ৰতিম মেট্ৰিক্স হ'লে, দেখুওৱা যে A^{-1}-ৰ আইগেন মানসমূহ A-ৰ আইগেন মানৰ প্ৰতিক্ৰমী।

(c) Determine whether the four vectors

$u = (1,\ 2,\ 3),\ v = (2,\ 0,\ -1)$,

$w = (1,\ -1,\ 1),\ x = (2,\ 1,\ 0)$

are linearly dependent or independent.

$u = (1,\ 2,\ 3),\ v = (2,\ 0,\ -1)$,

$w = (1,\ -1,\ 1)$ আৰু $x = (2,\ 1,\ 0)$

এই চাৰিটা ভেক্টৰ ৰৈখিকভাৱে পৰতন্ত্ৰ নে স্বতন্ত্ৰ নিৰ্ণয় কৰা।

(d) How can you obtain a tensor of rank 1 by combining tensors $g_{\mu\nu}$ and A^{α} ?

$g_{\mu\nu}$ আৰু A^{α} সংযোজন কৰি কেনেদৰে এটা ৰেংক 1 ৰ টেন্‌চৰ পাব পাৰি লিখা।

3. Answer ***any three*** of the following questions : 5×3=15

তলত দিয়া প্ৰশ্নবোৰৰ *যিকোনো তিনিটাৰ* উত্তৰ দিয়া :

(a) Give definition of a group. What do you mean by subgroup and invariant subgroup? 3+2=5

সংঘৰ সংজ্ঞা দিয়া। উপসংঘ আৰু অক্ৰমনীয় উপসংঘ বুলিলে কি বুজা ?

(b) State Cayley-Hamilton theorem and verify it for the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$ 1+4=5

কেলি-হেমিল্টন উপপাদ্যটো লিখা আৰু

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$ মেট্ৰিক্সৰ কাৰণে উপপাদ্যটো প্ৰমাণ কৰা।

(c) (i) Prove that the sum of two tensors of the same rank and type is also a tensor of same rank and type. 3

প্ৰমাণ কৰা যে একে ৰেংক আৰু প্ৰকাৰৰ দুটা টেন্‌চৰৰ যোগফল একেই ৰেংক আৰু প্ৰকাৰৰ টেন্‌চৰ হয়।

(ii) Show that gradient of a scalar field is a covariant tensor of rank 1. 2

দেখুওৱা যে এখন স্কেলাৰ ক্ষেত্ৰৰ গ্ৰেডিয়েন্ট এটা ৰেংক 1-ৰ ক'ভেৰিয়েন্ট টেন্‌চৰ হয়।

(d) "Lorentz transformation can be merely regarded as a rotation of coordinate axes x, y, z and ict in space-time." Illustrate the statement. 5

'লৰেঞ্জ ৰূপান্তৰণ কেৱল, স্থানাংক অক্ষ x, y, z আৰু ictৰ স্থান-কালত ঘূৰ্ণন বুলি বিবেচনা কৰিব পাৰি।" এই বাক্যটি চিত্ৰসহ স্পষ্ট কৰা।

(e) What do you mean by symmetric and anti-symmetric tensors? If a covariant tensor of rank two is symmetric in one coordinate system, show that it is symmetric in any coordinate system. 2+3=5

সমমিত আৰু প্ৰতিসমমিত টেন্‌চৰ কাক কয় ? যদি এটা দুই ৰেংক বিশিষ্ট ক'ভেৰিয়েন্ট টেন্‌চৰ এটা স্থানাংক পদ্ধতিত সমমিত হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে ই যিকোনো স্থানাংক পদ্ধতিৰ সমমিত হ'ব।

4. (a) Diagonalize the matrix 5

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 0 \end{bmatrix}$$

মেট্ৰিক্সটো ডায়েগ'নেলাইজ্ কৰা।

(b) How can you find the function of a diagonalizable matrix? 2½

ডায়েগ'নেলাইজ কৰিব পৰা এটা মেট্ৰিক্সৰ ফলন কেনেকৈ উলিওৱা হয় ?

(c) Evaluate e^A, where $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. 2½

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ হ'লে, e^A-ৰ মান উলিওৱা।

Or / অথবা

(i) Using direction cosines, establish the relation

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \ , \ i = 1, 2, 3 \qquad 4$$

দিৰেক্সন কোছাইন ব্যৱহাৰ কৰি

$$\bar{x}_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j \ , \ i = 1, 2, 3$$

সম্পৰ্কটো প্ৰতিষ্ঠা কৰা।

(ii) Show that Kronecker delta is an invariant tensor. 2

দেখুওৱা যে ক্ৰোনেকাৰ ডেল্টা এটা অক্ৰমণীয় টেন্‌চৰ।

(iii) If $a_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}=0$ for all values of the variables $x^1, x^2, \ldots\ldots, x^n$, then show that

$a_{ij}+a_{ji}=0$. 4

যদি $x^1, x^2, \ldots\ldots, x^n$ এই সকলোবোৰ চলকৰ বাবে $a_{\alpha\beta}x^{\alpha}x^{\beta}=0$ হয়, তেন্তে দেখুওৱা যে $a_{ij}+a_{ji}=0$.

5. (a) Show that $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=A^i_{ji}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}A^i\right)$ 8

দেখুওৱা যে, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=A^i_{ji}=\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{g}A^i\right)$

(b) Hence write $\nabla^2\phi$ in tensorial notation. 2

$\nabla^2\phi$ ক টেন্‌চৰৰ ভাষাত প্ৰকাশ কৰা।

Or / অথবা

(i) If A^{mn}_{pq} is a mixed tensor, what will be the type of A^{mm}_{pq} and A^{mn}_{pp} ? Justify your answer. 3

A^{mn}_{pq} যদি এটা মিক্সড্ টেন্‌চৰ হয়, A^{mm}_{pq} আৰু A^{mn}_{pp} কি প্ৰকাৰৰ হ'ব কৰি দেখুওৱা।

(ii) Find the components of a vector in polar coordinates whose components in Cartesian coordinates are $\dot{x}$ and $\dot{y}$. 7

কাৰ্টেছীয় স্থানাংকত এটা ভেক্টৰৰ উপাংশ $\dot{x}$ আৰু $\dot{y}$ হ'লে ধ্ৰুৱীয় স্থানাংকত ইয়াৰ উপাংশ দুটা নিৰ্ণয় কৰা।

6. (a) Show that any tensor C_{ij} can be expressed as a sum of two parts, one symmetric and another anti-symmetric. 4

দেখুওৱা যে যিকোনো টেন্‌চৰ C_{ij} হ'ল সমমিত আৰু প্ৰতিসমমিত দুটা অংশৰ যোগফল।

(b) Prove that $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_j \delta_{ij}$. 2

প্ৰমাণ কৰা যে $\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i B_j \delta_{ij}$.

(c) Express the vector product of two vectors $\vec{A}$ and $\vec{B}$ using tensor ε_{ijk}. 4

ε_{ijk} ব্যৱহাৰ কৰি $\vec{A}$ আৰু $\vec{B}$ ভেক্টৰৰ ভেক্টৰ গুণফল প্ৰকাশ কৰা।

Or / অথবা

(i) What is Einstein's summation convention? Explain with example. 2

আইনষ্টাইনৰ যোগৰ নিয়ম কি ? উদাহৰণসহ লিখা।

(ii) "The inner product of tensors can be thought of as outer product followed by contraction." Illustrate with example. 3

"টেন্‌চৰৰ বহিঃপূৰণৰ লগতে সংকোচন প্ৰক্ৰিয়াক অন্তঃপূৰণ যে বোলা হয়।" স্পষ্টভাৱে উদাহৰণসহ দেখুওৱা।

(iii) Write short note on ***any one*** of the following: 5

তলৰ *যিকোনো এটাৰ* ওপৰত চমু টোকা লিখা :

Stress tensor

প্ৰতিচাপ টেন্‌চৰ

Moment of inertia tensor

জড়ভ্ৰামক টেন্‌চৰ

Metric tensor

মেট্ৰিক টেন্‌চৰ