

অমল্লম্ব মনু মনু মনু মনু \mathbb{Z} আৰু $*$ বৰ্ণিত $+$ লোভা-
 হ'ল। $(\mathbb{Z}, +)$ ৰ ক্ষেত্ৰত দেখা-মাব য়ে

$$a + 0 = a = 0 + a, \forall a \in \mathbb{Z}$$

অৰ্থাৎ, 0 হৈ একক হ'ল।

আমি (\mathbb{Z}, \times) লৈ পাম

$$a \times 1 = a = 1 \times a \quad \forall a \in \mathbb{Z}$$

গতিকে পূৰ্ণসংখ্যা ক্ষেত্ৰত একক হ'ল 1 ।

ধৰা $*$ হৈ এটা \mathbb{Z} -ক্ষেত্ৰত প্ৰক্ৰিয়া হ'ল:

$$a * b = a - b \quad \text{একক হ'ল কি হ'ল?}$$

ধৰি লোভা একক-হ'ল e ।

$$\therefore a * e = a = e * a \quad \text{হ'ল লাগিব।}$$

$$\Rightarrow a - e = a = e - a = \dots$$

$$\text{অত্যা, } a - e = a$$

$$\Rightarrow e = 0$$

$$\text{একেদৰে } e - a = a$$

$$\Rightarrow e = 2a$$

কি দেখা গ'ল য়ে একক হ'ল নাহ।

ধৰা অমল্লম্ব মনু মনু মনু \mathbb{Q} ৰ ওপৰত $*$ বৰ্ণিত-
 প্ৰক্ৰিয়া হ'ল যিকোনো $a, b \in \mathbb{Q}$ বাবে

$$a * b = \frac{ab}{2}$$

ধৰা একক হ'ল e ।

$$\therefore a * e = e * a = a$$

$$\Rightarrow \frac{ae}{2} = \frac{ea}{2} = a$$

$$\text{অত্যা } \frac{ae}{2} = a \Rightarrow e = 2$$

$$\text{একেদৰে } \frac{ea}{2} = a \Rightarrow e = 2$$

\therefore হ'ল একক হ'ল 2 (হ'ল পাৰে আমি
 পাৰ চৰাই-এমোৰ, দুমোৰ-হিচাপে নলভ কামো)

সংহতি $R - \{-1\}$ [-1 ক বাদ দি বাকী বাস্তব সংখ্যা] আৰু $*$

$$a * b = \frac{a}{b+1}$$

একক মৌল e লোৱা,

$$a * e = \frac{a}{e+1}, \quad e * a = \frac{e}{a+1}$$

অত্যা, $a * e = a$

$$\Rightarrow \frac{a}{e+1} = a$$

$$\Rightarrow \frac{1}{e+1} = 1$$

$$\Rightarrow e+1 = 1$$

$$\Rightarrow e = 0$$

$$e * a = a$$

$$\Rightarrow \frac{e}{a+1} = a$$

$$\Rightarrow e = a(a+1)$$

\therefore কোনো নিৰ্দিষ্ট e ৰ মান পোৱা নগ'ল।

~~এটা~~ বিপৰীত মৌল (inverse) :-

ধৰা হ'ল X অণু সংহতি আৰু $*$ ইয়াৰ ওপৰত এটা দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়া।

এটা মৌল b ক কোনো মৌল $a \in X$ ৰ বিপৰীত মৌল বুলি কোৱা হয় যদি

$$a * b = b * a = e$$

উদা. বাস্তব সংখ্যাৰ সংহতিত $+$ প্ৰক্ৰিয়াৰ বাবে

$-a$ হৈছে $a \in R$ ৰ বিপৰীত মৌল।

$R \setminus \{0\}$ সংহতিত \times প্ৰক্ৰিয়াৰ বাবে

$x \in R$ ৰ বিপৰীত মৌল $\frac{1}{x} \in R$ ।

Note : 1) (সংহতি আৰু দ্বৈত প্ৰক্ৰিয়াৰ ওপৰত নিৰ্ভৰ কৰি

বিপৰীত মৌল যেনেগৈ যেনেগৈ হ'ব পাৰে।

যেনে 2 ৰ বিপৰীত মৌল -2 বা $\frac{1}{2}$ হ'ব

পাৰে -

2. a ৰ বিপৰীত মৌলক a^{-1} হিচাপে লিখা হয়।

~~এটা~~ দেখুওৱা :-

মিশ্রযোগ্যতা, ক্রমবিন্যাস

Q.2 * চৌকুর সহযোগিতা এবং ক্রমবিন্যাস বিধি মত
 চলে নে পরীক্ষা-করা: -

১) $a * b = \frac{ab}{3}$ য'ত $a, b \in \mathbb{Q}$ (পরিমিত)

৩ সহযোগিতা প্রমাণ :- ধরা- $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

প্রতিমা, $(a * b) = \frac{ab}{3}$.

$$(a * b) * c = \frac{\frac{ab}{3} * c}{3} = \frac{\frac{abc}{3}}{3} = \frac{abc}{9}$$

আরো- $(b * c) = \frac{bc}{3}$

$$\therefore a * (b * c) = \frac{a * \frac{bc}{3}}{3} = \frac{abc}{9}$$

$$\therefore a * (b * c) = (a * b) * c.$$

২) ক্রমবিন্যাস:

$$a * b = \frac{ab}{3} = \frac{ba}{3} = b * a \quad (\because a, b \in \mathbb{Q} \text{ পরিমিত} - \text{সত্যিকারে } ab = ba)$$

Ex. $a * b =$ গড় (a, b) য'ত $a, b \in \mathbb{N}$.

তবে ① $12 * 4, 18 * 24, 7 * 5$ উল্লেখ করা,

② সহযোগিতা বিধি; ক্রমবিন্যাস- বিধি পরীক্ষা করা

$$12 * 4 = \text{গড়}(12, 4) = 4;$$

$$18 * 24 = \text{গড়}(18, 24) = 6$$

$$7 * 5 = \text{গড়}(7, 5) = 1$$

$$(a * b) * c = \text{গড়}(\text{গড়}(a, b), c) = \text{গড়}(a, b, c)$$

~~$(a * b) * c = \text{গড়}(a, b * c)$~~

$$a * (b * c) = \text{গড়}(a, \text{গড়}(b, c)) = \text{গড়}(a, b, c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{N}$$

$$\therefore a * (b * c) = (a * b) * c$$

Q. $a * b = \frac{a+b}{2}, a, b \in \mathbb{Q}$

① $a * b = \frac{a+b}{2} = \frac{b+a}{2} = b * a$

$$\therefore a * b = b * a$$

অসংযোগিতা: $a * b = \frac{a+b}{2}$

$$(a * b) * c = \frac{1}{2} \left\{ \frac{a+b}{2} + c \right\} = \frac{1}{2} \frac{a+b+2c}{2} = \frac{a+b+2c}{4}$$

$$a * (b * c) = \frac{1}{2} \left\{ a + \frac{b+c}{2} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{2a+b+c}{2} \right\} = \frac{2a+b+c}{4}$$

$$\therefore (a * b) * c \neq a * (b * c)$$

অর্থাৎ * হল অসংযোগিতা বিধি মানি চলে।

৭. প্রবাহন $S = \mathbb{Q} - \{1\}$ (১ ভিন্ন পবিত্রম সংখ্যা) এবং

$$a * b = a + b - ab \quad \forall a, b \in S$$

প্রমাণ করো যে ① * এটা দ্বৈত-ক্রিয়া

② * অসংযোগিতা এবং কম্বিউটিভিটি মানি চলে।

সে।

$$a, b \in S \Rightarrow ab \in S$$

$$\Rightarrow a + b - ab \in S$$

$$\therefore a, b \in S \Rightarrow a * b \in S.$$

(নকিন্তু $a * b = 1$ হ'ল মোতাবেক)

যদি $a * b = 1$ হয়,

$$a * b = 1$$

$$\Rightarrow a + b - ab = 1$$

$$\Rightarrow a + b(1-a) = 1$$

$$\Rightarrow b(1-a) = 1-a$$

$$\Rightarrow b = 1.$$

একদিকে $a = 1$

$$\therefore a, b \notin S$$

সত্যিকারে $a * b \in S$ হলে $a * b \in S \vee ab \in S$

$\therefore *$ একটি দ্বৈত প্রক্রিয়া।

সহযোগিতা বিধি:-

$$a * (b * c) = a * (a + b - ab)$$

$$= \{a + (a + b - ab)\} - a(a + b - ab)$$

$$= 2a + b - ab - a^2 - ab + a^2 b$$

$$(a * b) * c = a$$

সহযোগিতা বিধি: a

$$a * (b * c) = a * (b + c - bc)$$

$$= a + (b + c - bc) - a(b + c - bc)$$

$$= a + b + c - bc - ab - ac + abc$$

$$= a + b + c - ab - bc - ca + abc$$

$$(a * b) * c = (a + b - ab) * c$$

$$= (a + b - ab) + c - (a + b - ab)c$$

$$= a + b + c - ab - ac - bc + abc$$

$$= a + b + c - ab - bc - ca + abc$$

$$\therefore a * (b * c) = (a * b) * c$$

ক্রম বিমূর্ততা:- $a * b = a + b - ab$

$$b * a = b + a - ba$$

মিথ্যে- a আৰু b পৰিষ্কৃত, $a + b = b + a$ আৰু $ab = ba$

$$\therefore a * b = b * a$$

Identity নিৰপেক্ষ-মৌল

Ex $\ast, \mathbb{Q} - \{1\}$ সহজিত উপবৃত্ত-অর্থাৎ-দ্বৈত-প্রক্রিয়া-মাণে
 $a \ast b = a + b - ab$. একক বা নিৰপেক্ষ-মৌল বিচলিত কৰা।

সংজ্ঞা- একক মৌল e

$$\therefore a \ast e = a + e - ae \quad \forall a \in \mathbb{Q} - \{1\}$$

$$\Rightarrow a + e - ae = a \quad (\because e \text{ হ'ল একক মৌল})$$

$$\Rightarrow e(1-a) = 0$$

$$\Rightarrow e = 0. \quad \therefore 0 \text{ হ'ল নিৰপেক্ষ-মৌল।}$$

উপসর্গ স্বাক্ষর
 $a \in \mathbb{Q} - \{0\}$ হলে a^{-1} উদ্ভব।

সমাধি $a * a^{-1} = 0$ $(\because 0$ গৌ-বিষয়ক-মৌলিক)

$$\Rightarrow a + a^{-1} * a a^{-1} = 0$$

$$\Rightarrow a + a^{-1}(1-a) = 0$$

$$\Rightarrow a^{-1} = \frac{-a}{a-1} \in \mathbb{Q} - \{1\}. \quad (\because a \neq 1, \frac{a}{a-1} \text{ এটা পসিভ/নেগেটিভ})$$

\therefore বিষয়ক-মৌলিক 0 আৰু inverse $= \frac{a}{a-1}$.

৭. সকলো যোৰ অনূন-পসিভে মধ্যম-মধ্যমিক গুণে-মুক্তি কৰা হ'ল। অর্থাৎ $\mathbb{Q}_0 = \mathbb{Q} - \{0\}$, যিহেতু $*$ ৰ মধ্যম-এনেৰ্ভবণ $a * b = \frac{ab}{4} \quad \forall a, b \in \mathbb{Q}_0$.

(1) একক মৌলিক (2) কোনো মৌলিক-বিপৰীত মৌলিক উদ্ভব।

সমাধি. ধৰা e একক মৌলিক।

$$\Rightarrow a * e = a \quad \forall a \in \mathbb{Q}_0$$

$$\Rightarrow \frac{ae}{4} = a$$

$$\Rightarrow e = 4. \quad \therefore \text{বিষয়ক-মৌলিক } 4.$$

(2) বিপৰীত মৌলিক: ধৰা হ'ল a ৰ বিপৰীত মৌলিক a^{-1}

$$a * a^{-1} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{a \cdot a^{-1}}{4} = 4 \Rightarrow a^{-1} = \frac{16}{a}$$

যিহেতু $a \neq 0, \frac{16}{a} \in \mathbb{Q}_0$.

$\therefore a$ ৰ বিপৰীত মৌলিক $\frac{16}{a} \neq$

Ex. Let X এটা অসীম মন্থিত

আৰু $*$, $P(X)$ ৰ উপসর্গ এটা-উপসর্গ মতে

$$A * B = A \cap B \quad \forall A, B \in P(X)$$

(1) দেখুওৱা যে একক মৌলিক X

(2) দেখুওৱা যে X একমাত্র বিপৰীত মৌলিক হ'ল $P(X)$ ৰ মৌলিক।

সমাধি. ধৰা হ'ল $E \in P(X)$ একক মৌলিক।

$$\therefore A * E = A = E * A \quad \forall A \in P(X)$$

$$\Rightarrow A \cap E = A = E \cap A \quad \forall A \subseteq X.$$

$P(X)$ হ'ল power set. X ৰ সকলো উপসর্গসমূহ।

$$\Rightarrow E = X$$

\therefore * সংলগ্নে $P(X)$ সংজ্ঞাটির একক মৌল X .

(2) ধরাে A র বিপরীত মৌল S .

$$\Rightarrow A * S = S * A = X$$

$$\Rightarrow A \cap S = S \cap A = X$$

$$\Rightarrow A = S = X$$

$\therefore X$ তাই - নিজের - বিপরীত - মৌল। এবং একমাত্র - বিপরীত মৌল বিশিষ্ট $P(X)$ র - মৌল ইল X .

৪. X অধিক সংজ্ঞা $P(X)$ র $*$ এর দ্বারা প্রদত্ত যেখানে $A * B = (A - B) \cup (B - A) \forall A, B \in P(X)$

[$P(X)$ ইল X র power set. X র উপসংহতি-সমূহের সংজ্ঞাক্রমে power set হল]

(1) দ্বিতীয়ক্রিয়া $*$ র ক্ষেত্রে $P(X)$ র - নিরপেক্ষ মৌল \emptyset হিচনে দেখাও।

(2) $P(X)$ র সকলো মৌল বিপরীত মৌল বিশিষ্ট আৰ A তাই নিজের - বিপরীত মৌল।

প্রমাণ ধরাে $A \in P(X)$ আৰ \emptyset নিরপেক্ষ মৌল।

$$A * \emptyset = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A)$$

$$= (A \cap E) \cup (E \cap A')$$

$$\bullet A * \emptyset = (A - \emptyset) \cup (\emptyset - A)$$

$$= (A \cap \emptyset') \cup (\emptyset \cap A')$$

$$= (A \cap U) \cup \emptyset$$

$$= A \cup \emptyset$$

$$= A. \quad \bullet \text{ একদিকে } \emptyset * A = A$$

$\therefore \emptyset$ উল $P(X)$ ত নিরপেক্ষ - (identity) মৌল।

(2) $A * A = (A \setminus A) \cup (A \setminus A)$

$$= \emptyset \cup \emptyset$$

$$= \emptyset$$

\therefore সকলো $A \in P(X)$ বিপরীত মৌল বিশিষ্ট আৰ A র বিপরীত মৌল A .