# Chapter 10
## Algebra of vectors.
## (ভেক্টৰ বীজগণিত)


যিবিলাক ৰাশিৰ মান আৰু দিশ দুয়োটাই থাকে সে ৰাশিবোৰক **ভেক্টৰ বা সদিশ ৰাশি** বোলে।

PQ এটা ভেক্টৰ বুলি কলে আমি বুজো যে ইয়াৰ মাপ হ'ল P ৰ পৰা Q বিন্দুটোৰ মাজৰ দূৰত্বৰ সমান আৰু ইয়াৰ দিশ হ'ল P ৰ পৰা Q লৈ যোৱা দিশত। P বিন্দুটোক আদিবিন্দু (initial point) আৰু Q বিন্দুটোক প্ৰান্তবিন্দু (terminal point) বোলে। সাধাৰণতে ভেক্টৰ বোৰক $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ আদিৰে সূচোৱা হয়।

দিশ নথকা ৰাশিক অদিশ ৰাশি (scalar) বোলে।

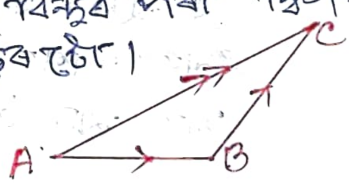
**ভেক্টৰৰ সমতা (Equality of vectors):-**
$\vec{a} = \vec{b}$ হ'ব যদিহে (i) সিহঁতৰ দৈৰ্ঘ্য একে আৰু (ii) সিহঁতৰ দিশ একে।

**শূন্য ভেক্টৰ (Zero or null vector):-** যি ভেক্টৰ ৰাশিৰ আদিবিন্দু আৰু প্ৰান্তবিন্দু একে হয় তেনে ভেক্টৰক শূন্য ভেক্টৰ বোলে। আৰু ইয়াক $\vec{0}$ হিচাপে লিখা হয়।

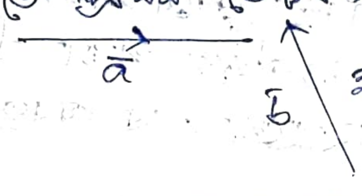
**একক ভেক্টৰ:** যি ভেক্টৰৰ মান এক তাক একক ভেক্টৰ বোলে। ইয়াক $\hat{a}, \hat{b}$ (a-কেপ, b কেপ) আদিৰে সূচোৱা হয়।

**একৰেখীয় ভেক্টৰ:** দুটা বা ততোধিক ভেক্টৰক একৰেখীয় বুলি কোৱা হয় যদিহে ইহঁত একেডাল ৰেখাৰ লগত সমান্তৰাল ভাৱে থাকে।

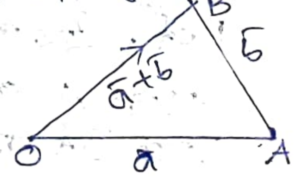
**ভেক্টৰৰ যোগ:** ধৰাহওক $\vec{AB}$ আৰু $\vec{BC}$ দুটা ভেক্টৰ। মন কৰিব লগীয়া যে প্ৰথম ভেক্টৰৰ অন্তবিন্দু B, দ্বিতীয় ভেক্টৰৰ আদিবিন্দু। এনেক্ষেত্ৰত দুয়োটা ভেক্টৰৰ যোগফল হ'ব $\vec{AC}$ অৰ্থাৎ প্ৰথম ভেক্টৰৰ আদিবিন্দুৰ পৰা দ্বিতীয় ভেক্টৰৰ অন্তবিন্দুলৈ অঁকা ভেক্টৰটো।



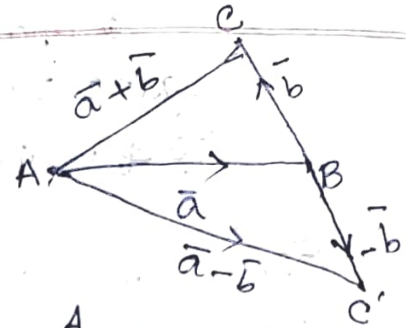

$\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ দুটা ভেক্টৰৰ যোগফল পাবলৈ হ'লে সিহঁতক প্ৰথমে এনেদৰে সজাই ল'ব লাগিব যাতে প্ৰথম ভেক্টৰৰ অন্তবিন্দুটো ২য় ভেক্টৰৰ সমান হয়।



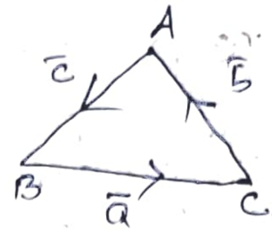

হ'লে $\vec{a} + \vec{b} =$



$\vec{a}-\vec{b}$ :


ধৰা হ'ল ABC এটা ত্ৰিভুজ। সাধাৰণতে A শীৰ্ষবিন্দুৰ বিপৰীতে থকা ভেক্টৰক $\vec{a}$, B বিন্দুৰ বিপৰীতে থকা ভেক্টৰক $\vec{b}$ আৰু C বিন্দুৰ বিপৰীতে থকা ভেক্টৰক $\vec{c}$ ৰে নিৰ্দেশ কৰা হয়।




$$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{BC}+\vec{CA}+\vec{AB}$$
$$= (\vec{BC}+\vec{CA})+\vec{AB}$$
$$= \vec{BA}+\vec{AB}$$
$$= -\vec{AB}+\vec{AB}$$
$$= \vec{0}$$

অৰ্থাৎ যেতিয়া ত্ৰিভুজ এটাৰ বাহুকেইটাক এটাৰ পাছত এটাকৈ ভেক্টৰ হিচাপে লৈ যোগ কৰা হয় তেতিয়া লব্ধমান শূন্য ভেক্টৰ হয়। ইয়াত আদিবিন্দু আৰু অন্তিম বিন্দু একেটাই (ইয়াত B) হয়।

ভেক্টৰৰ ধৰ্ম (Properties)

(1) $\vec{a}+\vec{b} = \vec{b}+\vec{a}$ (ক্ৰমবিনিময় বিধি)

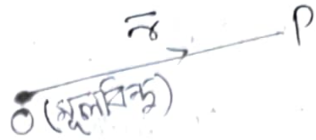
(2) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c} = \vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (সহযোজিতা বিধি)

(3) যদি $\lambda$ এটা স্কেলাৰ (বা অদিশ ৰাশি) আৰু $\vec{a}$ এটা ভেক্টৰ ৰাশি তেন্তে $\lambda$ আৰু $\vec{a}$ ৰ পূৰণফলক $\lambda\vec{a}$ ৰে সূচিত কৰা হয় আৰু $\lambda\vec{a}$ এটা ভেক্টৰ ৰাশি। ইয়াৰ দিশ $\vec{a}$ ৰ দিশৰ লগত একে (অথবা বিপৰীতমুখী) আৰু মান $\vec{a}$ ৰ মানতকৈ $\lambda$ গুণ অধিক।

## Position Vector (P.V)
## অৱস্থান ভেক্টৰ

Def<sup></sup>n. ধৰা হ'ল O মূলবিন্দু (কোনো সমতল নাইবা অন্তৰীক্ষত) আৰু A সমতল বা অন্তৰীক্ষত থকা যিকোনো এটা বিন্দু, তেন্তে $\vec{OA}$ ক O বিন্দু সাপেক্ষে A ৰ অৱস্থান ভেক্টৰ বোলে।

$\vec{OP} = \vec{r}$ হ'লে আমি
OP ৰ P.V. $\vec{r}$ বুলি কওঁ
আৰু ইয়াক P($\vec{r}$) লিখালে




লিখা অৰ্থাৎ কোনো বিন্দু P ৰ অৱস্থান ভেক্টৰ (p.v) $\vec{r}$ বুলিলে আমি এই কথাটো বুজোঁ যে সমতলখনত (বা অন্তৰীক্ষত) এটা মূল বিন্দু O আছে যাতে $|\vec{OP}| = r$.

Note:- ~~...~~ $\vec{AB}$ ভেক্টৰৰ A বিন্দুৰ P.V $\vec{a}$ আৰু B বিন্দুৰ P.V $\vec{b}$ হ'লে A বিন্দু সাপেক্ষে B বিন্দুৰ অৱস্থান ভেক্টৰ হ'ব $\vec{b} - \vec{a}$.

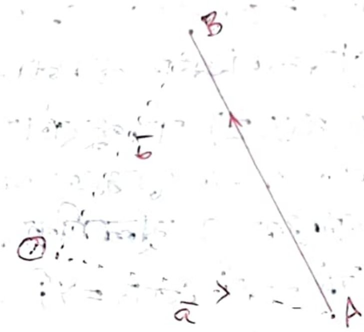
চিত্ৰৰ পৰা দেখা যায় যে A আৰু B ৰ P.V ক্ৰমান্বয়ে $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$ ৰ অৰ্থ হ'ল এটা বিন্দু O আছে যাতে $\vec{OA} = \vec{a}$
$\vec{OB} = \vec{b}$.

এতিয়া ভেক্টৰৰ নিয়মানুসৰি -

$\vec{OA} + \vec{AB} = \vec{OB}$

$\Rightarrow \vec{a} + \vec{AB} = \vec{b}$

$\Rightarrow \vec{AB} = \vec{b} - \vec{a}$




অৰ্থাৎ A সাপেক্ষে B ৰ অৱস্থান ভেক্টৰ হ'ল
B ৰ অৱস্থান ভেক্টৰ − A ৰ অৱস্থান ভেক্টৰ.

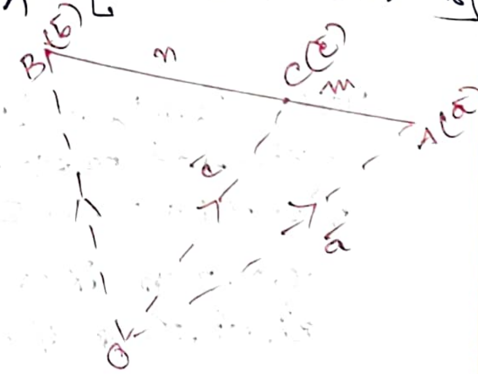
## Section formula (ছেদন বিধি)

ধৰা হ'ল A আৰু B সমতলৰ (বা অন্তৰীক্ষৰ) দুটা বিন্দু যাৰ P.V ক্ৰমে $\vec{a}$ আৰু $\vec{b}$. ধৰা হ'ল C বিন্দুৱে $\vec{AB}$ ভেক্টৰক আভ্যন্তৰীণভাৱে m : n ত কাটিছে। যদি C বিন্দুৰ অৱস্থান ভেক্টৰ $\vec{c}$ হয় তেন্তে $\vec{c} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$ [note: স্থানাংক জ্যামিতিৰ দৰে]

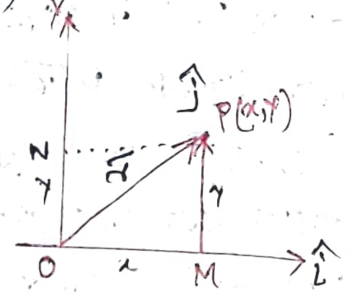
∴ অন্তৰ্বিভক্তৰ ক্ষেত্ৰত $\vec{c} = \frac{m\vec{b} + n\vec{a}}{m+n}$.

তেনেদৰে

বহিৰ্বিভক্তৰ ক্ষেত্ৰত $\vec{c} = \frac{m\vec{b} - n\vec{a}}{m-n}$.



## component of vector in two dimension :
(দ্বিমাত্ৰিক জ্যামিতিত ভেক্টৰৰ উপাংশ :)




~~Let~~ P(x,y) এবিন্দু লোৱা হ'ল।
ইয়াত O মূলবিন্দু OM = x, PM = y.
ধৰাহ'ল Ox ৰ দিশত একক ভেক্টৰ $\hat i$,
আৰু OY ৰ দিশত একক ভেক্টৰ $\hat j$.
অৰ্থাৎ $\vec{OM} = x\hat i$, $\vec{MP} = y\hat j$, $\vec{OP} = \vec r$

এতিয়া, $\vec{OP} = \vec{OM} + \vec{MP}$

$$\Rightarrow \vec r = x\hat i + y\hat j.$$

পাইথাগোৰাছৰ সূত্ৰৰ পৰা $OP^2 = OM^2 + MP^2$

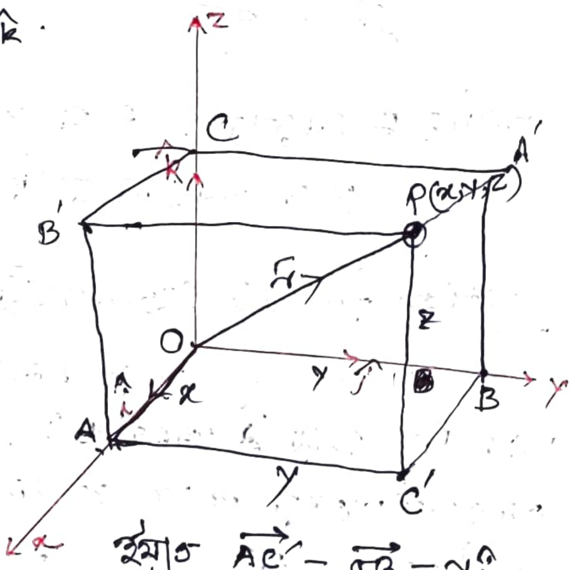
$$\Rightarrow OP^2 = x^2 + y^2$$

$$\Rightarrow OP = \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Rightarrow |\vec r| = \sqrt{x^2+y^2}$$ ($|\vec r|$ = $\vec r$ ৰ মাপাংক)

## Component of vectors in three dimension
(ত্ৰিমাত্ৰিক স্থানাংক জ্যামিতিত ভেক্টৰ উপাংশ)

P(x,y,z) বিন্দুটো লোৱা হ'ল। ধৰাহ'ল OX, OY, OZ ৰ দিশত একক ভেক্টৰ ক্ৰমান্বয়ে $\hat i$, $\hat j$ আৰু $\hat k$ ~~[illegible]~~। ~~[illegible]~~ O মূলবিন্দু, $\vec{OA} = x$, OB = y, আৰু OC = z. গতিকে,
$\vec{OA} = x\hat i$, $\vec{OB} = y\hat j$, $OC = z\hat k$.




$\cancel{\vec{OP} = \vec{OB} + \vec{BC'} + \vec{C'P}}$
$\cancel{= \vec{RC'} + \vec{C'A} + \vec{A'O}}$

$$\vec{OP} = \vec{OA} + \vec{AC'} + \vec{C'P}$$
$$= \vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC}$$
$$= x\hat i + y\hat j + z\hat k.$$

Thus $\vec r = x\hat i + y\hat j + z\hat k$.

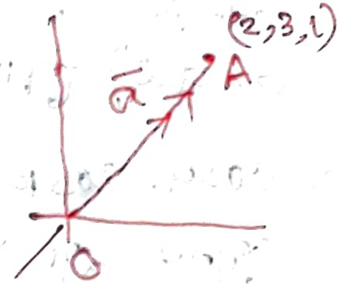
ইয়াত $\vec{AC'} = \vec{OB} = y\hat j$
$\vec{C'P} = \vec{OC} = z\hat k$

Note : ত্ৰিমাত্ৰিক উপাংশক দ্বিমাত্ৰিক উপাংশ প্ৰণালীৰ extended ৰূপ হিচাপে বিবেচনা কৰিব পৰা যায়।
$\vec r = x\hat i + y\hat j + z\hat k$ হ'লে

x, y, z ক $\vec r$ ৰ স্কেলাৰ উপাংশ বা অদিশ উপাংশ বোলে।
$x\hat i$, $y\hat j$, $z\hat k$ ক $\vec r$ ৰ ভেক্টৰ " " সদিশ " "

Note একক ভেক্টৰ $\hat i, \hat j, \hat k$ ক i, j, k হিচাপেও লিখা হয়।

Ex. এটা ভেক্টৰ $\bar{a}$ দিয়া আছে যাতে $\bar{a} = 2i + 3j + k$.
$\bar{a}$ ৰ দিশত একক ভেক্টৰ $\hat{a}$ উলিওৱা।




Sol$^n$ :- ইয়াত $\bar{a} = 2i + 3j + k$.

∴ মাপাংক $|\bar{a}| = \sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2}$

$$= \sqrt{14}$$

$$\therefore \quad \hat{a} = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|} = \frac{2i+3j+k}{\sqrt{14}} = \frac{2}{\sqrt{14}}i + \frac{3}{\sqrt{14}}j + \frac{1}{\sqrt{14}}k.$$

Ex $\vec{a} = 2i + 2j - 5k$ আৰু $\vec{b} = 2i + j + 3k$ ভেক্টৰ দুটাৰ যোগফলৰ দিশত থকা একক ভেক্টৰটো লিখা।

Sol$^n$ $\vec{a} + \vec{b} = (2+2)i + (2+1)j + (-5+3)k$

$$= 4i + 3j - 2k.$$

ইয়াৰ মাপাংক $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{4^2 + 3^2 + (-2)^2} = \sqrt{29}$

∴ $\vec{a} + \vec{b}$ ৰ দিশত একক ভেক্টৰ,

একক $= \dfrac{4i + 3j - 2k}{\sqrt{29}} = \dfrac{4}{\sqrt{29}}i + \dfrac{3}{\sqrt{29}}j - \dfrac{2}{\sqrt{29}}k.$